Scheda 2

Esercizio 1: Sia $\alpha > 0$ e si definisca

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{|x|^\alpha + |y|}, & \text{per ogni } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Determinare per quali valori di α f risulta continua in $\mathbb{R}^2$.

(ii) Per ogni $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ si determinino i valori di α per cui esiste la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0)$ e, qualora esista, la si calcoli.

(iii) Si trovino i valori di $\alpha > 0$ per cui f è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 2: Data la funzione f di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x^2 + y^2 < 1,\ y < 0 \\ \sqrt{x^2+y^2}\sin(xy), & \text{se } x^2 + y^2 < 1,\ y \geq 0 \\ \sqrt{x^2+y^2}\sin(xy), & \text{se } x^2 + y^2 \geq 1,\ y \geq 0 \end{cases}$$

dire se f è differenziabile in $(0,0)$. Dire inoltre se esiste il limite $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$.

Esercizio 3: Sia $f(x,y) = (x-y)e^{-x^2-y^2}$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Si trovino i punti critici di f.

(ii) f ha massimo e/o minimo assoluto in $\mathbb{R}^2$? Giustificare la risposta. In caso affermativo, calcolare tali punti e determinarne la natura.

Esercizio 4: Si determini la natura dei punti critici di

$$f(x,y) = \sin x + (y - \cos x)^m$$

per $m = 2, 3, 4$. Ragionare su come l'esponente m cambi la natura dei punti critici, e provare a capire cosa succede per $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ arbitrario.

Esercizio 5: Determinare tutte le soluzioni della seguente equazione differenziale del terzo ordine a coefficienti costanti:

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 2xe^{-2x}(6x+5)$$

Esercizio 6: Determinare tutte le soluzioni della seguente equazione differenziale del terzo ordine a coefficienti costanti:

$$y''' + 2y'' + 2y' + y = xe^{-x}$$

Esercizio 7: Con il metodo della variazione delle costanti si determini una soluzione particolare della seguente equazione differenziale

$$y'' + 3y' + 2y = x \sin x$$

Esercizio 8: Sia ω la forma differenziale di $\mathbb{R}^2$ in $(\mathbb{R}^2)^*$ definita da

$$\omega(x, y) = \left(e^{x+y} \cos x - e^{x+y} \sin x\right) dx + \left(e^{x+y} \cos x + \alpha e^{x+y} \sin x\right) dy$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) Si trovino tutti i valori di α per cui ω è chiusa.

(ii) Per i valori trovati di α trovati al punto (i) si calcoli una primitiva.

(iii) Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma(t) = (t, \sin t)$ per ogni $t \in (0, 2\pi)$.

Esercizio 9: Calcolare l'integrale doppio

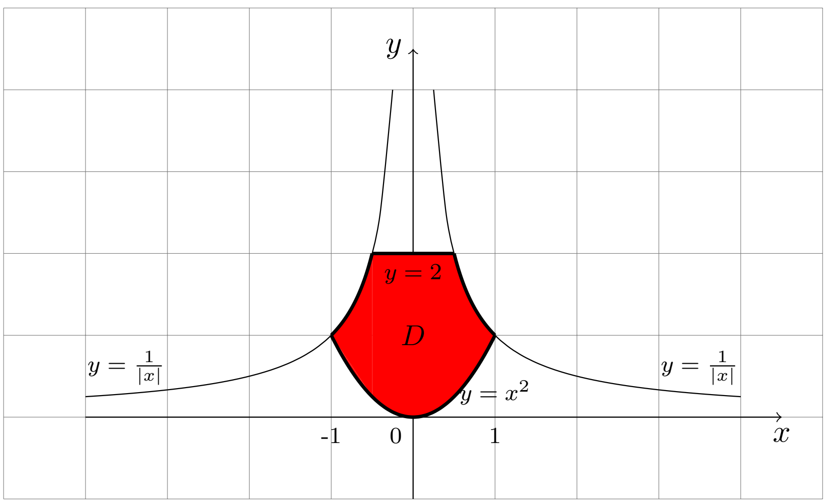
$$\iint_D \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dxdy$$

dove D è la porzione del primo quadrante contenuta nel cerchio $x^2 + y^2 \leq 2$, al di fuori del cerchio $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$. [Suggerimento: utilizzare coordinate polari $(\Phi(\rho, \theta) = (x, y))$ ed esprimere $\Phi^{-1}(D)$ come dominio normale rispetto a θ]

Esercizio 10: Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D x^2 y \, dxdy$$

dove D è l'insieme rappresentato in figura:



Soluzioni

Esercizio 1:

(i) f è continua per $\alpha < 2$ [se $\alpha \geq 2$, ponendo $y = |x|^\alpha$ si vede che f non è continua].

(ii) $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0)$ esiste se $\alpha < 1$ ed è nulla. Per $\alpha = 1$ il limite non esiste. Si noti che per $\alpha > 1$ la derivata direzionale non esiste per i λ tali che $\lambda_2 = 0$.

(iii) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $0 < \alpha < 1$. Inoltre $df(0,0) = 0$.

Esercizio 2: f è differenziabile in $(0,0)$ con differenziale nullo. Non esiste il limite per $(x, y) \to \infty$ [si noti che la funzione è nulla sugli assi cartesiani, mentre diverge su $y = x$, ad esempio]

Esercizio 3: Punti critici: $A = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $B = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. f ammette massimo e minimo assoluto in $\mathbb{R}^2$ in quanto $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y) = 0$. Ne segue che A è massimo assoluto per f in $\mathbb{R}^2$ e B è minimo assoluto per f in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 4: Per ogni m si ha che i punti critici sono $A_k = (k\pi + \frac{\pi}{2}, 0)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Per $m = 2$ si ha che A_k è di sella se $k = 0$ o k è pari, mentre è minimo locale se k è dispari. Per $m = 3$ si ha che tutti i punti A_k non sono nè di massimo nè di minimo. Per $m = 4$ il comportamento è lo stesso che per $m = 2$. Più in generale, per m pari, $m \geq 2$ si ha che i punti A_k sono di sella se k è pari e di minimo locale per k dispari, mentre se m è dispari, $m \geq 3$, allora tutti i punti A_k non sono nè di massimo nè di minimo.

Esercizio 5: $-e^{-2x}(x^2 + 4x + 5) + c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$, al variare di $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6: $x(\frac{1}{2}x + 1)e^{-x} + c_1 e^{-x} + c_2 e^{-\frac{x}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_3 e^{-\frac{x}{2}} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$ al variare di $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 7: $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = e^{-2x}$, $\varphi_1(x) = \frac{1}{2}e^x(x \sin x - (x-1)\cos(x))$,
$\varphi_2(x) = \frac{e^{2x}}{25}(5x - 4)\cos x + (3 - 10x)\sin x)$.

$$y(x) = y_1(x)\varphi_1(x) + y_2(x)\varphi_2(x) = \cos x\Big(-\frac{3}{10}x + \frac{17}{50}\Big) + \sin x\Big(\frac{3}{10}x + \frac{3}{25}\Big).$$

Esercizio 8: ω è esatta se e solo se $\alpha = 0$. Una sua primitiva è $U(x, y) = e^{x+y}\cos x$. Ne segue che $\int_\gamma \omega = U(2\pi, 0) - U(0, 0) = e^{2\pi} - 1$.

Esercizio 9: Risulta $\frac{2}{3}(\sqrt{2} - 1)$.

Esercizio 10: Risulta $\frac{11}{21}$.